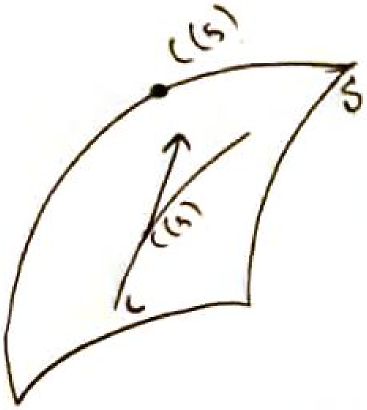
Διάλεξη
17/12/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

Ορισμός: Μια επιφάνεια S καλείται ευθειογενής αν από κάθε σημείο της διέρχεται ευθεία (ή ευθ. τμήμα) που περιέχεται στην S.

Παραδείγματα:

Ελικοειδής



Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to S$ επιφανειακή καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$

$$k_n(\dot{c}(s)) = \frac{II_{c(s)}(\dot{c}(s))}{I_{c(s)}(\dot{c}(s))} = II_{c(s)}(\dot{c}(s)) =$$

$$= \langle L_{c(s)}\dot{c}(s), \dot{c}(s)\rangle = -\langle dN_{c(s)}\dot{c}(s), \dot{c}(s)\rangle =$$

$$= -\langle (N\circ c)^{\cdot}(s), \dot{c}(s)\rangle = -\left(\langle N\circ c(s), \dot{c}(s)\rangle\right)^{\cdot} +$$

$$+ \langle N\circ c(s), \ddot{c}(s)\rangle \Rightarrow k_n(\dot{c}(s)) = \langle N\circ c(s), \ddot{c}(s)\rangle$$

Συμπέρασμα: Αν c ευθεία, τότε $k_n(\dot{c}(s)) = 0$, δηλαδή είναι ασυμπτωτική καμπύλη.

Πρόταση: Οι γενέτειρες μιας ευθειογενούς επιφάνειας είναι ασυμπτωτικές της καμπύλες.

Πόρισμα: Η καμπυλότητα Gauss κάθε ευθειογενούς επιφάνειας είναι $K \leq 0$.

$\Rightarrow w'(u) \parallel \langle c'(u), w(u)\rangle w(u) - \langle w(u), w(u)\rangle c'(u) \Rightarrow$
$w'(u) = \mu(u)\left(\langle c'(u), w(u)\rangle w(u) - c'(u)\right)$

$w'(u) \times w(u) = -\mu(u)\, c'(u) \times w(u) \Rightarrow$

$c'(u) \times w(u) + v\, w'(u) \times w(u) = (1 - v\mu(u))\, c'(u) \times w(u)$

Πρόταση: Έστω η ευθειογενής επιφάνεια $x(u,v) = c(u) + v w(u)$, $\|w(u)\| = 1$ και $c'(u) \times w(u) \neq 0$, $\forall u \in I$. Η επιφάνεια είναι αναπτυκτή $\Leftrightarrow [c'(u), w(u), w'(u)] = 0$, $\forall u \in I$

▶ Έστω S ευθειογενής επιφάνεια. $c: I \to S$ και είναι ορθογώνια προς τις γενέτειρες, δηλαδή $\langle c'(u), w(u)\rangle = 0$

Έστω S αναπτυκτή: $[c', w, w'] = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} w' \perp c' \times w \\ w' \perp w \end{array}\right\} \Rightarrow$

$w' \parallel (c' \times w) \times w = \langle c', w\rangle w - \langle w, w\rangle c'$

$\Rightarrow \boxed{w'(u) = a(u)\, c'(u)}$

I) Έστω $a(u) = 0$, $\forall u \in I \Rightarrow w(u) = e$

$\langle c'(u), e\rangle = 0 \Rightarrow \langle c(u), e\rangle' = 0 \Rightarrow \langle c(u), e\rangle = \text{σταθ}$

Άρα κυλινδρ. επιφάνεια

II) $a(u) = a = \text{σταθ} \neq 0$, $\forall u \in I$

$w'(u) = a\, c'(u) \Rightarrow w(u) = a\, c(u) + p_0$

άρα κωνική επιφάνεια.

III) $a(u)\, a'(u) \neq 0$

$x_u \times x_v = (1 + v a(u))\, c'(u) \times w(u) =$

κώνος χάνω την κανονικότητα στα σημεία:

$x\left(u, -\frac{1}{a(u)}\right) = c(u) - \frac{1}{a(u)} w(u) = \tilde{c}(u)$

$\tilde{c}'(u) = c'(u) + \frac{a'(u)}{a^2(u)} w(u) - \frac{1}{a(u)} w'(u) = c'(u) + \frac{a'(u)}{a^2(u)} w(u)$

$- c'(u) = w(u) \Rightarrow [c'(u), w(u), w'(u)] = 0$, $\forall u \in I$

N, N_u = ανεξάρτητο από το v, επομένως οι μοναδιαίοι για τη παραμετρική καμπύλη: $X(u=\text{σταθ}, v)$ είναι σταθερά.

$$\left.\begin{matrix} x_v \perp N \\ x_v \perp N_u \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_v \parallel N \times N_u = \text{σταθ} \Rightarrow X(u=\text{σταθ}, v) = \text{ευθεία}$$

Θεώρημα: Κάθε επιφάνεια που αποτελείται από τα παραβολικά σημεία είναι αναπτυκτή.

Ερώτημα: Είναι αυτές οι μόνες αναπτυκτή επιφάνειες;

Έστω ευθειογενής επιφάνεια S. Θεωρώ κανονική καμπύλη $c: I \to S$ τέτοια ώστε να μην εφάπτεται ποτέ σε γενέτειρα, δηλαδή $c'(u), \omega(u)$ γραμμ. ανεξ., $\forall u \in I$

Άρα $X(u,v) = c(u) + v\,\omega(u)$

Έστω ότι είναι αναπτυκτή. Άρα πρέπει $K=0 \Rightarrow eg - f^2 = 0$

$\|\omega(u)\| = 1$

$x_u = c'(u) + v\,\omega'(u)$

$x_v = \omega(u)$

$x_u \times x_v = c'(u) \times \omega(u) + v\,\omega'(u) \times \omega(u)$

$$N(u,v) = \frac{c'(u)\times\omega(u) + v\,\omega'(u)\times\omega(u)}{\|\quad (\text{ίδιο}) \quad\|}$$

$g = \langle x_{vv}, N\rangle = 0$. Επομένως $f = 0 \Leftrightarrow \langle x_{uv}, N\rangle = 0 \Leftrightarrow$

$$\left\langle \omega'(u), \frac{c'(u)\times\omega(u) + v\,\omega'(u)\times\omega(u)}{\| \quad \|}\right\rangle = 0$$

$\Leftrightarrow \langle \omega'(u), c'(u)\times\omega(u)\rangle = 0 \Leftrightarrow [c', \omega, \omega'] = 0$

Αντίστροφα έστω ότι η ευθειογενής επιφάνεια $X(u,v) = c(u) + v\,\omega(u)$, $\|\omega(u)\| = 1$, $c'(u)\times\omega(u) \neq 0$, $\forall u$. Υποθέτω ότι $[c', \omega, \omega'] = 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \omega'(u) \perp c'(u)\times\omega(u) \\ \omega'(u) \perp \omega(u) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \omega(u) \parallel (c'(u)\times\omega(u))\times\omega(u)$$

$E = \|x_u\|^2$, $F = \langle x_u, x_v \rangle$, $G = \|x_v\|^2$, $K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}$

$e = \langle x_{uu}, N \rangle$, $f = \langle x_{uv}, N \rangle$, $g = \langle x_{vv}, N \rangle$

$$N = \frac{(1+av)\, c'(u) \times w(u)}{\|(1+av)\, c'(u) \times w(u)\|} = \pm \frac{c'(u) \times w(u)}{\|c'(u) \times w(u)\|}$$

$x_{vv} = 0 \Rightarrow g = 0$.

$x_{uv} = a c'(u) \Rightarrow f = \left\langle a c'(u), \dfrac{c'(u) \times w(u)}{\| \quad \|} \right\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$

(III) <u>Επιφάνειες εφαπτομένων</u>: Θεωρώ κανονική καμπύλη $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με παράμετρο $u \in I$. Ορίζω την παραμετρική επιφάνεια $x: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$x(u,v) = c(u) + v c'(u)$, είναι ευθειογενής με γενέτειρα την εφαπτόμενη της καμπύλης c.

$$\left.\begin{aligned} x_u &= c'(u) + v c''(u) \\ x_v &= c'(u) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_u \times x_v = v\, c''(u) \times c'(u)$$

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = \frac{v\, c''(u) \times c'(u)}{|v| \, \|c''(u) \times c'(u)\|} = \pm \frac{c''(u) \times c'(u)}{\|c''(u) \times c'(u)\|},$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Ισχύει ότι $\left.\begin{aligned} g &= \langle x_{vv}, N \rangle = 0 \\ f &= \langle x_{uv}, N \rangle = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{K = 0}$

Ορισμός: Μια επιφάνεια καλείται αναπτυκτή αν-ν είναι ευθειογενής και το εφαπτόμενο της κάθετο είναι σταθερό κατά μήκος της κάθε γενέτειρας.

Π.χ.: κυλινδρικές, κωνικές και επιφάνειες εφαπτομένων

Ερώτημα: Είναι αυτές οι μόνες αναπτυκτές επιφάνειες;
↳ Έστω S αναπτυκτή επιφάνεια και $c: I \to S$ γενέτειρα της $N \circ c =$ σταθ. $(N\circ c)'(t) = 0$

$$\mathrm{III} - 2H\,\mathrm{II} + K\,\mathrm{I} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{III}_{c(t)}(c'(t)) - 2H\circ c(t)\,\mathrm{III}_{c(t)}(c'(t)) + K\circ c(t)\,\mathrm{I}_{c(t)}(c'(t)) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{III}_{c(t)}(c'(t)) = \langle L_{c(t)}(c'(t)), L_{c(t)}(c'(t)) \rangle$$

$$= \langle dN_{c(t)}(c'(t)), dN_{c(t)}(c'(t)) \rangle$$

$$= \langle (N\circ c)'(t), (N\circ c)'(t) \rangle = 0$$

Άρα $K\circ c(t)\,\|c'(t)\|^2 = 0 \Rightarrow K\circ c(t) = 0$

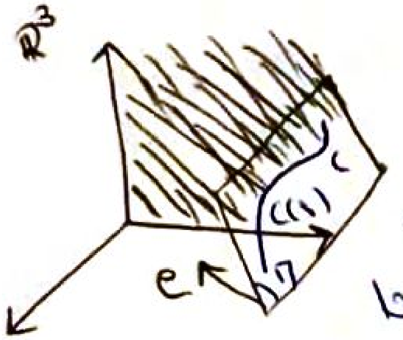
Πρόταση: Κάθε αναπτυκτή επιφάνεια έχει καμπυλότητα Gauss $K=0$.

Ερώτημα: Αν μια επιφάνεια έχει καμπυλότητα Gauss $K=0$, είναι αναπτυκτή;
↳ Έστω S επιφάνεια με $K=0$. Υποθέτω ότι η S αποτελείται από παραβολικά σημεία, δηλαδή $k_1 > k_2 = 0$
Ξέρουμε ότι υπάρχει σύστημα συν/νων $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ του οποίου οι παραμετρικές καμπύλες είναι καμπύλες, δηλαδή τα X_u, X_v είναι ιδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten. Έστω ότι
$L X_u = k_1 X_u$, $L X_v = k_2 X_v = 0 \Leftrightarrow N_v = 0 \Rightarrow N(u,v) = N(u)$
$N(u,v) = N(u)$

Άρα $F = 0 = f$ $\therefore f = 0 \Leftrightarrow \boxed{\langle X_u, N_u \rangle = 0}$

Τρεις κατηγορίες ευθειογενών επιφανειών:

(I) Κυλινδρικές επιφάνειες:



Θεωρώ επίπεδο Π και $c: I \to \Pi$ επίπεδη καμπύλη. Έστω e μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο Π. Η παραμετρική επιφάνεια $X: I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με $X(s,v)=c(s)+ve$ καλείται κυλινδρική επιφάνεια με καμπύλη την c.

Είναι ευθειογενής επιφάνεια με γενέτειρες $\parallel e \perp \Pi$.

$X_s(s,v)=\dot{c}(s)$, $X_v(s,v)=e$.

$X_s\times X_v(s,v)=\dot{c}(s)\times e$, $\|X_s\times X_v\|=1 \Rightarrow$ Η X είναι κανονική με μοναδιαίο κάθετο $N(s,v)=\dot{c}(s)\times e$.

1η θεμελιώδης μορφή:

$E=\|X_s\|^2=\|\dot{c}(s)\|^2=1$

$F=\langle X_s, X_v\rangle=\langle \dot{c}(s), e\rangle=0$.

$G=\|X_v\|^2=\|e\|^2=1$

$\Rightarrow$ Η επιφάνεια είναι τοπικά ισομετρική με το επίπεδο και επομένως έχει καμπυλότητα Gauss: $K=0$.

(II) Θεωρώ καμπύλη $c: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με παράμετρο $u\in I$ και ορίζω την παραμετρική επιφάνεια $X: I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με $X(u,v)=c(u)+v\,\omega(u)$, όπου $\underbrace{\omega(u)=\alpha c(u)+p_0}_{\neq 0}$, $\alpha\neq 0$.

$X(u,v)=c(u)+\alpha v c(u)+v p_0=(1+\alpha v)c(u)+v p_0$.

$X(u,-\frac{1}{\alpha})=-\frac{1}{\alpha}p_0$. Η X καλείται κωνική επιφάνεια με κορυφή το σημείο $-\frac{1}{\alpha}p_0$ και καμπύλη οδηγό την c.

$$\left.\begin{array}{l} X_u=(1+\alpha v)c(u) \\ X_v=\omega(u)=\alpha c(u)+p_0 \end{array}\right\} \Rightarrow X_u\times X_v=(1+\alpha v)\,c'(u)\times\omega(u).$$